

Module 1 - Introduction aux probabilités

STT-1900 Méthodes statistiques pour l'ingénierie

Département de mathématiques et de statistique



UNIVERSITÉ
LAVAL

Importance de la statistique

Pourquoi un cours de statistique ?

Conception ou analyse de systèmes ou phénomènes **aléatoires**, c-à-d non déterministes.

Exemples :

- fiabilité d'une machine industrielle
- quantité de pluie reçue dans un bassin versant
- demande en électricité d'un grand édifice à bureaux
- nombre de tomates produites par un plant

Probabilités

Outil mathématique formel servant à décrire et modéliser les comportements aléatoires.

Exemple 1 :

Description mathématique du comportement d'un dé régulier à 6 faces :

- l'ensemble des résultats possibles est $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
- la probabilité d'obtenir chacun de ces résultats lors d'un lancer est $1/6$.

La statistique

Étude quantitative des attributs d'une «population» à partir d'observations.

⇒ Le caractère **incertain** (non déterministe, aléatoire) qui découle de l'échantillonnage des observations fait que la statistique est basée sur la théorie des probabilités.

Exemple 2 :

- Nous aimerions savoir si un dé à 6 faces est équilibré.

Exemples de décisions basées sur la statistique :

- Sept véhicules d'un même modèle d'une même année sont impliqués dans des incidents similaires en trois mois. $\Rightarrow$ Doit-on procéder à un rappel?
- Un futur pont doit pouvoir résister à une crue centennale (c-à-d dont la probabilité de survenir ou être excédée est de $\frac{1}{100}$ chaque année).
- Trois types d'apprêt peuvent être appliqués à des échantillons d'aluminium à l'aide de deux méthodes différentes. Y a-t-il une combinaison apprêt-méthode qui se démarque?

$\Rightarrow$ Une bonne compréhension des probabilités et de la statistique est **indispensable** à la prise de décision en présence d'incertitude!

Expérience aléatoire et espace échantillonnal

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$

Expérience dont le résultat dépend du hasard, ne pouvant être prédit avec certitude.

Espace échantillonnal S

Ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience $\mathcal{E}$.

- **S discret** : Si S est dénombrable (peut être fini ou infini)
(ex : la liste des entiers)
- **S continu** : Si S est non dénombrable
(ex : un intervalle de valeurs sur la droite réelle)

Exemple 3 : Quel est l'espace échantillonnal ?

- $\mathcal{E}_1$: On roule un dé ordinaire et on note le chiffre sur la face du dessus.
- $\mathcal{E}_2$: On pige une carte parmi les quatre rois d'un jeu standard.
- $\mathcal{E}_3$: On compte le nombre de véhicules traversant un pont durant une heure.
- $\mathcal{E}_4$: On mesure la quantité de pluie (en mm) reçue à une station météo au cours de l'automne.

Événement

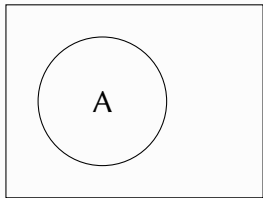
Sous-ensemble de l'espace échantillonnal S .
On utilise une lettre majuscule pour l'identifier.

Retour aux 4 expériences aléatoires, exemples d'événements :

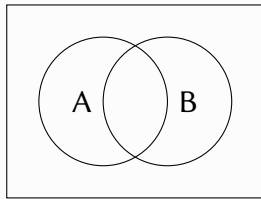
- $\mathcal{E}_1$: A = «Le dé affiche un nombre pair» = $\{2, 4, 6\}$
- $\mathcal{E}_2$: N = «On pige un roi noir» = $\{R_{\spadesuit}, R_{\clubsuit}\}$
- $\mathcal{E}_3$: C = «Moins de 100 véhicules traversent le pont» = $\{0, 1, 2, \dots, 99\}$
- $\mathcal{E}_4$: D = «La station reçoit plus de 150 mm de pluie» = $(150, \infty)$

Rappel des opérations sur les ensembles

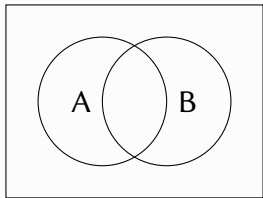
1) Complément de A : $\bar{A}$



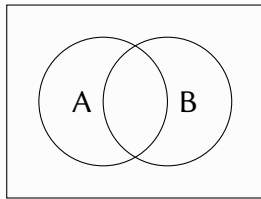
2) Inclusion de B dans A : $B \subset A$



3) Intersection de A et B : $A \cap B$

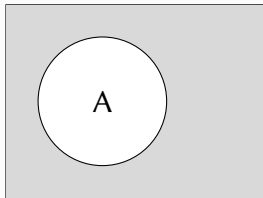


4) Union de A et B : $A \cup B$

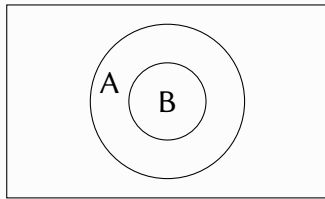


Rappel des opérations sur les ensembles

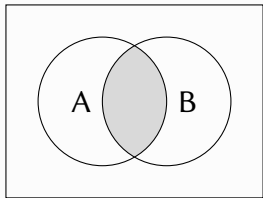
1) Complément de A : $\bar{A}$



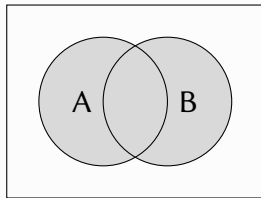
2) Inclusion de B dans A : $B \subset A$



3) Intersection de A et B : $A \cap B$



4) Union de A et B : $A \cup B$



Événements mutuellement exclusifs

Des événements sont **mutuellement exclusifs** si toutes leurs combinaisons possibles d'intersections sont vides, c-à-d lorsqu'**au plus un** de ces événements peut se produire à la fois.

En d'autres termes, A, B et C sont mutuellement exclusifs, si

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \emptyset$
- $B \cap C = \emptyset$
- $A \cap B \cap C = \emptyset$

QUIZ!

Les événements suivants sont-ils mutuellement exclusifs ?

- $\mathcal{E}_1$: Lancer d'un dé.

Soit A = «obtenir un nombre pair», $B = \{5\}$ et $C = \{1\}$.

- $\mathcal{E}_4$: Mesurer les précipitations.

A = «La station reçoit plus de 150 mm»,

B = «La station reçoit moins de 175 mm» et

C = «La station reçoit entre 200 et 300 mm».

Probabilités

Probabilité : Définition axiomatique

Soit une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, son espace échantillonnal S et un événement A défini dans S .

La **probabilité d'un événement**, notée $P(\cdot)$, est un nombre réel respectant les axiomes suivants :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Pour toute suite d'événements **mutuellement exclusifs** $A_1, A_2, \dots, A_k$ définis dans S , on a

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

4. L'axiome 3 reste vrai quand $k \rightarrow \infty$: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Résultats découlant des axiomes

Les résultats qui suivent sont des conséquences des 4 axiomes définissant une probabilité.

- **Théorème 1.1** : $P(\emptyset) = 0$
[S et $\emptyset$ sont mutuellement exclusifs, $S \cup \emptyset = S$ et $P(S) = 1$...]
- **Théorème 1.2** : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
[A et $\overline{A}$ sont mutuellement exclusifs et $S = A \cup \overline{A}$...]
- **Théorème 1.3** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **Théorème 1.4** :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Résultats découlant des axiomes (suite)

- **Théorème 1.5** : Généralisation de 1.4 à k événements :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k-1} P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right)$$

- **Théorème 1.6** : Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

[$B = (\overline{A} \cap B) \cup A$, et $(\overline{A} \cap B)$ et A sont mutuellement exclusifs ...]

Résultats utiles

Ces deux résultats peuvent être utiles :

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

Exemple 4

Vous achetez un nouveau téléphone.

Définissons les événements suivants :

A : La carte SIM est défectueuse.

B : La batterie a une autonomie insuffisante.

Chez ce fournisseur, $P(A) = 0,05$, $P(B) = 0,20$ et $P(A \cup B) = 0,23$.

- a) Quelle est la probabilité que votre batterie dure suffisamment longtemps ?

- b) Quelle est la probabilité que les deux problèmes soient présents sur le téléphone que vous avez acheté ?

QUIZ !

Dans l'exemple précédent, quelle est la probabilité qu'aucun des deux problèmes n'affecte votre téléphone ?

Rappel : $P(A) = 0,05$, $P(B) = 0,20$ et $P(A \cup B) = 0,23$.

Exemple 5

Dans une certaine firme de génie,

- 55% des employés ont au moins une maîtrise,
- 70% des employés font au moins une journée de télétravail,
- 75% des employés habitent à moins de 30 km de leur lieu de travail principal.

Exemple 5 (suite)

Rappel : 55% des employés ont au moins une maîtrise.

Si on choisit un employé au hasard dans cette firme, pouvez-vous déterminer la probabilité qu'il s'agisse...

(i) d'un employé qui n'a pas de maîtrise?

Exemple 5 (suite)

Rappel : 55% ont une maîtrise, 70% font du télétravail et 75% habitent à moins de 30 km de leur lieu de travail.

On vous informe maintenant que dans cette firme,

- 35% des employés ont une maîtrise et font du télétravail,
- 30% ont une maîtrise, font du télétravail et habitent à moins de 30 km de leur lieu de travail,
- 5% ont une maîtrise, ne font pas de télétravail et n'habitent pas à moins de 30 km de leur lieu de travail.

Pouvez-vous maintenant déterminer la probabilité qu'un employé choisi au hasard...

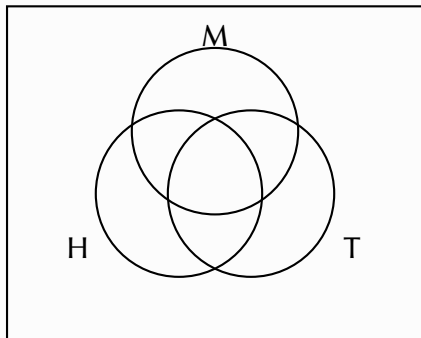
- (ii) ait une maîtrise et habite à moins de 30 km de son lieu de travail?
- (iii) n'ait pas de maîtrise et habite à moins de 30 km de son lieu de travail?
- (iv) ait une maîtrise ou habite à moins de 30 km de son lieu de travail?

Exemple 5 : piste de solution

Remplir toutes les zones mutuellement exclusives d'un diagramme de Venn.

M = «l'employé a une maîtrise», T = «l'employé fait du télétravail» et H = «l'employé habite à moins de 30 km de son lieu de travail».

Rappel : $P(M) = 0,55$, $P(T) = 0,70$, $P(H) = 0,75$, $P(M \cap T) = 0,35$, $P(M \cap T \cap H) = 0,30$ et $P(\bar{M} \cap \bar{T} \cap \bar{H}) = 0,05$.



Les probabilités conditionnelles

Exemple 5 : des infos partielles

Rappel : $P(M) = 0,55$, $P(H) = 0,75$, $P(M \cap H) = 0,45$, $P(T) = 0,70$ et $P(M \cap T) = 0,35$.

1. Si on vous disait que l'employé choisi habite à moins de 30 km de son lieu de travail, pourriez-vous déterminer la probabilité qu'il ait une maîtrise ?
2. Sauriez-vous déduire de vos informations la probabilité qu'un employé avec une maîtrise choisi au hasard fasse du télétravail ?

Pour faire ces calculs, vous devez utiliser une information partielle, qui réduit l'espace échantillonnal. Vous calculerez des *probabilités conditionnelles*...

Probabilité conditionnelle

Soit A et B deux événements dans S avec $P(B) > 0$. Alors la **probabilité conditionnelle** de A sachant que B s'est réalisé est

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Propriétés

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
2. $P(S|B) = P(B|B) = 1$
3. Soit $A_1, \dots, A_k$ une suite d'événements **mutuellement exclusifs**. Alors
$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i|B).$$
4. La propriété 3 demeure vraie quand $k \rightarrow \infty$.

Règle de multiplication

On peut utiliser la définition de probabilité conditionnelle pour déduire la valeur de $P(A \cap B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

On appelle cette formule «règle de multiplication».

Exemple 6

On sait que 70% des pièces électroniques que vous utilisez viennent de l'usine A et les autres pièces viennent de l'usine B, 25% de toutes les pièces sont défectueuses et 10% de toutes les pièces viennent de l'usine A et sont défectueuses.

- a) On vous donne une pièce qui vient de l'usine A. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

- b) On vous donne une pièce défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine B ?

QUIZ!

Supposons $P(B) > 0$.

- Que vaut $P(A|B)$ si $B \subset A$?
- Que vaut $P(A|B)$ si $A \subset B$?
- Que vaut $P(A|B)$ si A et B sont mutuellement exclusifs?

Indépendance de deux événements

Je roule un dé, puis je lance une pièce de monnaie.

Soit les événements

A = «le dé indique 6», et

B = «la pièce indique face».

Le fait que A se réalise ou non n'a aucun impact sur la probabilité de B !

On dira alors que A et B sont **indépendants**. Voyons une définition plus mathématique de l'indépendance d'événements.

Indépendance de deux événements

Soit A et B deux événements de S. On dit que A et B sont **indépendants**, noté $A \perp B$, si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Impact sur les probabilités conditionnelles

Supposons que $P(B) > 0$, de sorte que $P(A|B)$ est bien définie.

Si A et B sont indépendants, alors

$$P(A|B) = P(A)$$

À l'inverse, si cette condition est remplie, alors A et B sont indépendants.

Questions

1. Des événements mutuellement exclusifs sont-ils indépendants en général?
2. Si $A \subset B$, a-t-on que A et B sont indépendants, en général?

Généralisation à k événements

Définition

On dit de k événements qu'ils sont **mutuellement indépendants** si, et seulement si, les probabilités de **toutes** les intersections de 2, 3, ..., k d'entre eux sont égales aux produits de leurs probabilités respectives.

Par exemple, A, B, C sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ ET}$$

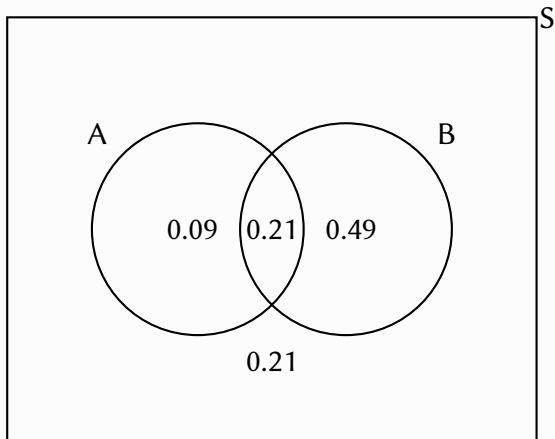
$$P(A \cap C) = P(A)P(C) \text{ ET}$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) \text{ ET}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

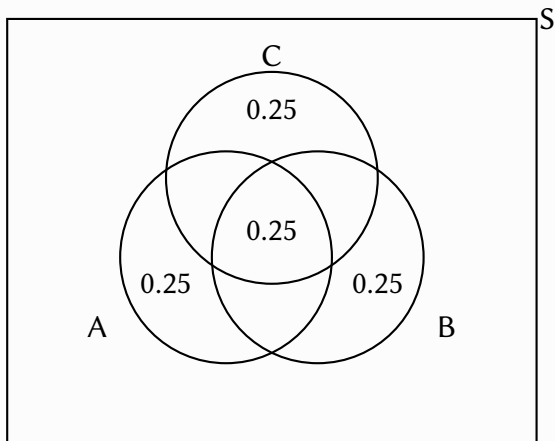
Exemple 7

A et B sont-ils indépendants ?



Exemple 8

Il est possible que $A \perp B$, $A \perp C$ et $B \perp C$, mais que A, B, C ne soient pas indépendants. Par exemple



Partitionner l'espace échantillonnal

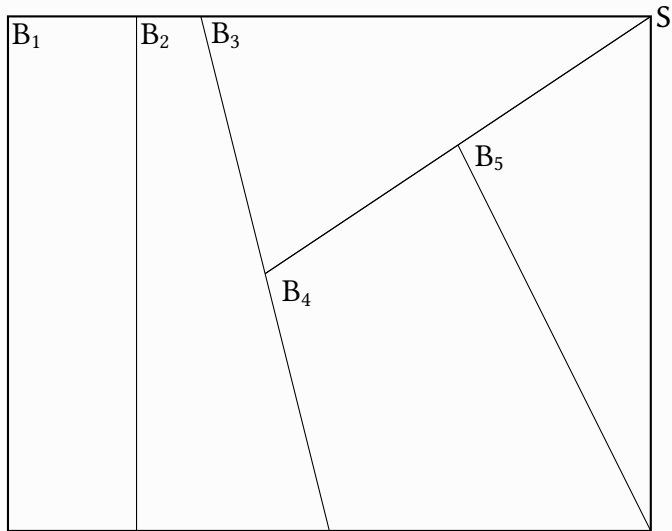
Plusieurs problèmes de calcul de probabilités deviennent plus simples si on les divise en plusieurs morceaux.

Partition de l'espace échantillonnal

On dit que $B_1, B_2, \dots, B_k$ forment une **partition de S** si et seulement si

1. ils sont mutuellement exclusifs, c-à-d $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$
et
2. leur union est $S : B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = S$.

Exemple d'une partition de S



Utilité de partitionner S

Lemme

Si $B_1, \dots, B_k$ forment une partition de S et A est un événement dans S , alors

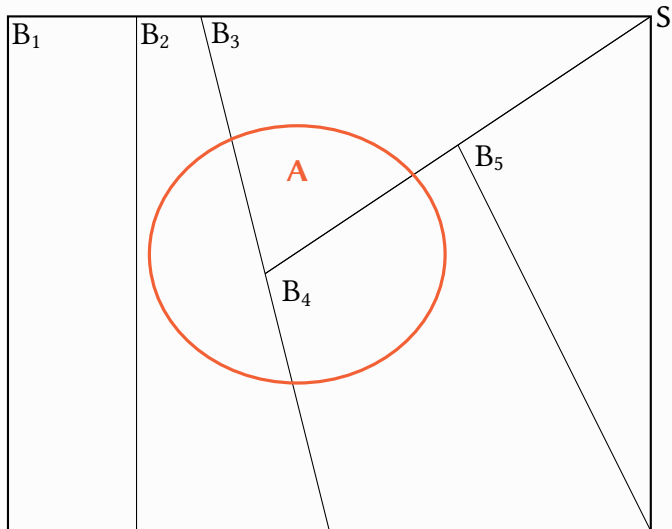
$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k).$$

Puisque $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$, $\forall i \neq j$, on a que

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_k)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A \cap B_i).$$

Exemple d'une partition de S (suite)



Conditionner sur une partition pour trouver $P(A)$

Théorème 1.7 : Loi des probabilités totales

Soit A un événement dans S et $B_1, \dots, B_k$, une partition de S . Alors

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_k) \\&= P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_k)P(A|B_k) \\&= \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)\end{aligned}$$

Cas particulier : Comme B et $\bar{B}$ forment une partition de S , on a
 $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$.

Exemple 9

Un certain étudiant est à l'heure 75% du temps. Quand il est à l'heure, il écoute le cours 90% du temps. Quand il n'est pas à l'heure, il écoute 20% du temps.

Soit H = «l'étudiant est à l'heure» et E = «l'étudiant écoute le cours».

- a) Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas à l'heure et qu'il n'écoute pas ?

Exemple 9 (suite)

b) Quelle est la probabilité qu'il écoute ?

Exemple 10

Un fabricant de dispositifs biomédicaux souhaite évaluer la performance à long terme de ses dispositifs afin d'orienter le choix des matériaux pour les prochaines générations de produits.

- 50% sont fabriqués à partir du matériau A;
- 30% sont fabriqués à partir du matériau B;
- 20% sont fabriqués à partir de matériaux alternatifs.

Les études de suivi clinique montrent que :

- 90% des dispositifs fabriqués en matériau A demeurent fonctionnels sans intervention chirurgicale majeure pendant plus de 10 ans;
- cette proportion est de 80% pour les dispositifs en matériau B;
- elle est de 70% pour les dispositifs fabriqués à partir de matériaux alternatifs.

Exemple 10 (suite)

Tracez un diagramme en arbre et un diagramme de Venn qui schématisent cette situation.

QUIZ!

Exemple 10 : Quelle est la probabilité qu'un dispositif pris au hasard demeure fonctionnel sans intervention chirurgicale majeure pendant plus de 10 ans?

Quand l'information est donnée «à l'envers» ...

Pour plusieurs problèmes, on donne l'information sous la forme $P(A|B_i)$, mais on nous demande de calculer $P(B_i|A)$.

- Dans l'exemple 9, quelle est la probabilité que l'étudiant soit arrivé à l'heure sachant qu'il écoute ?
- Dans l'exemple 10, si un dispositif a nécessité une intervention chirurgicale majeure avant 10 ans, quelle est la probabilité qu'il soit fait de matériau de type B ?

Théorème de Bayes

Soit A un événement dans S et $B_1, \dots, B_k$, une partition de S . Alors

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^k P(A|B_i)P(B_i)}, \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Exemple 9 (suite)

Rappel : $P(H) = 0,75$, $P(E|H) = 0,90$ et $P(E|\overline{H}) = 0,20$.

À l'aide du théorème de Bayes, quelle est la probabilité que l'étudiant soit arrivé à l'heure sachant qu'il écoute ?

QUIZ!

Un dispositif a nécessité une intervention chirurgicale majeure avant 10 ans.
Quelle est la probabilité que ce dispositif soit fait de matériau de type B?

Réponses aux exemples

1. $\mathcal{E}_1 : S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\mathcal{E}_2 : S_2 = \{R\spadesuit, R\heartsuit, R\diamondsuit, R\clubsuit\}$;
 $\mathcal{E}_3 : S_3 = \{0, 1, 2, \dots\}$; $\mathcal{E}_4 : S_4 = \{x : x \geq 0\}$.
2. $P(\overline{B}) = 0,80$, $P(A \cap B) = 0,02$
3. $P(\overline{M}) = 0,45$, $P(M \cap H) = 0,45$, $P(\overline{M} \cap H) = 0,30$, $P(\overline{M} \cap H \cap T) = ND$, $P(H \cup M) = 0,85$, $P(M|H) = 0,6$, $P(T|M) = 7/11$
4. $P(D|A) = 1/7$, $P(B|D) = 3/5$
5. Oui
6. $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$
7. $P(\overline{E} \cap \overline{H}) = 0,20$ $P(E) = 0,725$, $P(H|E) \approx 0,931$
8. S'inspirer de l'exemple 9